Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

8. závěrečné poznámky

1. Waldovy rovnosti

   Podmínku
   $$\exists\, c \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \quad P(\tau > n \ \Rightarrow\ |S_n - nE[X_1]| \leq c) = 1$$
   z Waldových rovností lze zkráceně zapsat ve tvaru
   $$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \sup_{n \geq n_0} |S_n - nE[X_1]| \cdot 1_{[\tau > n]} \in \mathbb{L}^*_\infty \tag{1}$$
   a tato podmínka je splněna, kdykoli
   $$\tau \leq \tau_c = \inf\{n \in \mathbb{N}; |S_n - nE[X_1]| > c\}$$
   platí skoro jistě pro nějaké $c \in \mathbb{R}_+$. Poznamenejme, že
   $$\mathbb{L}^*_\infty = \{X \in \mathbb{L}^* : \exists\, c \in \mathbb{R}_+ \ \ |X| \leq c \ \text{ skoro jistě } \}.$$

2. integrovatelnost času τ_c

   Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé stejně rozdělené a integrovatelné náhodné veličiny a $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ buď odpovídající náhodná procházka. Pro jednoduchost označme $\mathbb{S}_n = S_n - nE[X_1]$ odpovídající centrovanou náhodnou procházku. Nechť $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1) > 0$, pak
   $$\tau_c = \inf\{n \in \mathbb{N} : |\mathbb{S}_n| > c\} \in \mathbb{L}^*_1$$

   Důkaz:

   (a) Nejprve předpokládejme, že $P(|\mathbb{S}_1| > 2c) = p > 0$. Označme $Y_n = X_n - EX_n$ a $\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ kanonickou filtraci posloupnosti $\mathbb{S}_n$. Pak na množině $[|\mathbb{S}_n| \leq c]$ skoro jistě platí
   $$\begin{aligned} P(|\mathbb{S}_{n+1}| > c|\mathcal{F}_n) &= P(|\mathbb{S}_n + Y_{n+1}| > c|\mathcal{F}_n) = P(|\mathbb{S}_n + Y_{n+1}| > c, |\mathbb{S}_n| \leq c|\mathcal{F}_n) \\ &\geq P(|Y_{n+1}| > 2c, |\mathbb{S}_n| \leq c|\mathcal{F}_n) = P(|Y_{n+1}| > 2c|\mathcal{F}_n) = p, \end{aligned}$$
   neboť náhodná veličina Y_{n+1} je nezávislá na $\mathcal{F}_n$ a má stejné rozdělení jako náhodná veličina $\mathbb{S}_1$. Platí tedy
   $$P(|\mathbb{S}_{n+1}| \leq c \,|\, |\mathbb{S}_1| \leq c, \ldots, |\mathbb{S}_n| \leq c) \leq q := 1 - p < 1$$
   má-li levá strana smysl. Pak tedy dostáváme, že
   $$P(\tau_c > n) = P(|S_1| \leq c, \ldots, |S_n| \leq c) \leq q^n.$$
   Dostáváme tak, že
   $$E\tau_c \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(\tau_c > n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} < \infty.$$

   (b) Nyní předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $P(|\mathbb{S}_{n_0}| > 2c) > 0$. Je-li $n_0 = 1$, pak tento předpoklad odpovídá předpokladu v bodu a. Podle bodu a ihned dostaneme, že čas
   $$\nu_{c,n_0} = \inf\{k \in \mathbb{N} : |\mathbb{S}_{k \cdot n_0}| > c\}$$
   je integrovatelný, neboť $\mathbb{S}_{k \cdot n_0}$ je náhodná procházka s prvním krokem $\mathbb{S}_{n_0}$ takovým, že $\mathrm{var}(\mathbb{S}_{n_0}) = n_0 \sigma^2 > 0$. Nyní si stačí uvědomit, že $\tau_c \leq n_0 \cdot \nu_{c,n_0}$. Tato nerovnost nám totiž dává $E\tau_c \leq n_0 \cdot E\nu_{c,n_0} < \infty$.

(c) Nyní se můžeme omezit na případy, které nejsou zahrnuty pod bodem b. Můžeme tedy předpokládat, že $|\mathbb{S}_n| \leq c$ platí skoro jistě pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sigma^2 < \infty$ a např. podle Waldovy rovnosti (ii) s volbou $\tau = \tau_c \wedge n \in \mathbb{L}_1$ dostáváme, že

$$E\tau_c = \lim_{n\to\infty} \sigma^{-2} ES^2_{\tau_c \wedge n} \leq 4c^2\sigma^{-2} < \infty.$$

Použitá Waldova rovnost je tvaru $E\mathbb{S}^2_\tau = \sigma^2 \cdot E\tau$. Podmínka (1) je zřejmě splněna např. proto, že $\tau \leq \tau_c$ a mj. také proto, že $\tau \leq n \in \mathbb{N}$.

(d) Alternativním postupem k bodu c je použití CLV. To je možné pouze za předpokladu $\sigma^2 < \infty$, což můžeme předpokládat podobně jako v bodě c. CLV nám tedy dává

$$P(|\mathbb{S}_n| > 2c) \geq P(\mathbb{S}_n < -2c) = P(\tfrac{\mathbb{S}_n}{\sigma\sqrt{n}} < \tfrac{-2c}{\sigma\sqrt{n}}) \to \Phi(0) = \tfrac{1}{2},$$

neboť $-2c/(\sigma\sqrt{n}) \to 0$ pro $n \to \infty$. Zde využíváme stejnoměrné konvergence distribučních funkcí k distribuční funkci Φ standardního normálního rozdělení $N(0,1)$ v CLV. Odtud tedy dostáváme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $P(|\mathbb{S}_{n_0}| > 2c) > 0$, což je předpoklad odpovídající bodu b.